ЛИТЕРАТУРА

1. *Бельский С.М.* Влияние формы эпюры переднего удельного натяжения на распределение давления прокатки и выходных напряжений по ширине полосы // Известия вузов. Чёрная металлургия. 2008. № 1. С. 43-46.
2. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости: Пер. с англ. / Под ред. Г.С.Шапиро.- 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1979. 560 с.

Поступила в редакцию 10 ноября 2012 г.

Belsky S.M., Masur I.P., Dozhdikov V.I., Vasilyev V.B. ROLLED STRIPS FLATNESS CONTROL ON THE BASIS OF MATHEMATICAL MODEL OF LONGITUDINAL STRESSES DISTRIBUTION

The longitudinal and transversal distribution of the self-balancing component of elastic stresses in the rolled strip was analyzed as well as the amplitude attenuation coefficient. The results of this analysis are used for a design of new rolled strips flatness control methods.

Key words: flatness; self-balancing diagram; St Venan principle; amplitude attenuation coefficient.

УДК 517.9

ВОЗМУЩЕНИЕ ВЫПУКЛОЗНАЧНОГО ВОЛЬТЕРРОВОГО ВКЛЮЧЕНИЯ ВОЛЬТЕРРОВЫМ ОПЕРАТОРОМ, НЕ ОБЛАДАЮЩИМ СВОЙСТВОМ ВЫПУКЛОСТИ И ЗАМКНУТОСТИ ЗНАЧЕНИЙ

© А. И. Булгаков, А. А. Григоренко

Ключевые слова: возмущение вольтерровых операторов; локальная разрешимость; продолжаемость решений; априорная ограниченность; квазирешения.

Изучается включение, правая часть которого состоит из суммы значений выпуклозначного вольтеррового оператора и суперпозиции однозначного вольтеррового оператора и многозначного вольтеррового отображения, значения которого являются выпуклыми по переключению подмножествами в пространстве суммируемых функций. Для такого включения сформулированы теоремы разрешимости и продолжаемости решений, получено основное свойство квазирешений таких включений. Изучено включение, зависящее от параметра, принадлежащего метрическому пространству.

Возмущенное включение для многозначных отображений определено в работах [1–6], как включение в пространстве непрерывных функций, правая часть которого является алгебраической суммой значений двух многозначных отображений одно из них имеет замкнутые выпуклые образы, а второе имеет значения не обладающие этим свойством. Для таких включений в этих работах получены их основные свойства, при этом многозначное отображение, определенное правой частью этих включений, вообще говоря, может не являться вольтерровым отображением. В работах [7, 8] рассмотрено включение в пространстве кусочно непрерывных функций с вольтерровым по А.Н. Тихонову (см. [9]) многозначным отображением, возмущенное импульсными операторами. В данной статье продолжены исследования работ [1–8]. Здесь изучается возмущенное в пространстве непрерывных функций включение, у которого правая часть является вольтерровым по А.Н. Тихонову оператором, не обладающим свойством выпуклости и замкнутости значений.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$. Пусть $[a,c)$ ($c \leqslant \infty$). Обозначим $\mathbf{C}^n[a,c)$ пространство непрерывных функций $x:[a,c)\to\mathbb{R}^n$, $\mathbf{C}^n[a,b]$ — пространство всех сужений на $[a,b]$ $(b\in(a,c))$ функций $x\in\mathbf{C}^n[a,c)$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{C}^n[a,b]} = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$, $\Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ $(2^{C^n[a,b]})$ — множество всех непустых выпуклых компактов (множество всех непустых ограниченных подмножеств) пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Пусть множество M принадлежит пространству функций, определенных на отрезке $[a,b]$. Пусть $\nu\in(a,b)$. Обозначим $M|_a^\nu$ – множество всех сужений функций из множества M на отрезок $[a,\nu]$, $\overline{\text{co}}M$ — выпуклая замкнутая оболочка множества M, принадлежащая соответствующему пространству функций.

Пусть $b\in(a,c)$. Обозначим $\mathbf{L}^n[a,b]$ пространство суммируемых по Лебегу функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $||x||_{\mathbf{L}^n[a,b]} = \int\limits_a^b |x(s)|ds$; $\mathbf{L}^n[a,c)$ пространство измеримых по Лебегу функций $x:[a,c)\to\mathbb{R}$, обладающих свойством $\mathbf{L}^n[a,c)|_b^a = \mathbf{L}^n[a,b]$.

Будем говорить, что множество $\Phi\subset\mathbf{L}^n[a,b]$ выпукло по переключению, если для любых $x,y\in\Phi$ и любого измеримого множества $e\subset[a,b]$ функция $\chi(e)x+\chi([a,b]/e)y\in\Phi$, где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция соответствующего множества. Пусть $Sw(\mathbf{L}[a,b])$ – множество всех ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$, $\Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$ — множество всех непустых выпуклых ограниченных замкнутых выпуклых по переключению подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$.

Рассмотрим семейство операторов $T_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$, $b\in(a,c)$ и является параметром этого семейства. Будем предполагать, что это семейство обладает следующими свойствами (см. [10]):

1) для любого $b\in(a,c)$ множество $\{(T_bx)(a)\subset\mathbb{R}^n : x\in\mathbf{C}^n[a,b]\}$ ограничено в $\mathbb{R}^n$;

2) при каждом $b\in(a,c)$ для любого $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$ и любого $\nu\in(a,b)$ выполняется равенство $(T_b(x))\,|_a^\nu = T_\nu\,(x|_a^\nu)$ (таким образом, при каждом $b\in(a,c)$ оператор $T_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to\to\Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ вольтерров по А.Н. Тихонову) (см. [9]);

3) для любого $b\in(a,c)$ и для любого ограниченного множества $M\subset\mathbf{C}^n[a,b]$ образ $T_b(M)$ — предкомпактное множество пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$;

4) для любого $b\in(a,c)$ оператор $T_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ замкнут.

Пусть $b\in(a,c)$. Рассмотрим непрерывный оператор $W_b:\mathbf{C}^n[a,b]\times\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$, который образует семейство операторов относительно $b\in(a,c)$. Это семейство обладает следующими свойствами:

1) для любого $b\in(a,c)$ $\{W_b(x,y)(a)\in\mathbb{R}^n : x\in\mathbf{C}^n[a,b],\ y\in\mathbf{L}^n[a,b]\}$ ограничено в $\mathbb{R}^n$;

2) при каждом $b\in(a,c)$ для любых $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$, $y\in\mathbf{L}^n[a,b]$ и любого $\nu\in(a,b)$ выполняется равенство $(W_b(x,y))|_a^\nu = W_\nu(x|_a^\nu, y|_a^\nu)$;

3) для каждого ограниченного $V_1\subset\mathbf{C}^n[a,b]$ и слабо компактного множества $V_2\subset\mathbf{L}^n[a,b]$ образ $W_b(V_1;V_2)$ предкомпактен в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Пусть для любого $b \in (a,c)$ отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ образует семейство операторов относительно параметра b и обладает следующими свойствами:

1) для каждого ограниченного $V \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ образ $\Phi_b(V)$ ограничен суммируемой функцией на отрезке $[a,b]$;

2) при каждом $b \in (a,c)$ любого $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ и любого $\nu \in (a,b)$ выполняется равенство $\Phi_b(x)|_a^\nu = \Phi_\nu(x|_a^\nu)$.

Для любого $b \in (a,c)$ рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ включение

$$x \in T_b(x) + W_b(x, \Phi_b(x)). \tag{1}$$

Под суммой правой части включения (1) понимается алгебраическая сумма множеств. Отметим также, что правая часть включения (1) не обладает свойством выпуклости и замкнутости значений в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$. Это связано с тем, что для любого $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$ отображение $W_b(x,\cdot) : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ не обладает свойством линейности, а отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$, вообще говоря, не обладает свойством выпуклости значений. В дальнейшем, если включение (1) понимается как не одно фиксированное включение, а как множество включений, параметр $b \in (a,c)$ может варьироваться на некотором интервале $[a,\tau) \subset [a,c)$, то будем говорить, что включение (1) — семейство включений на интервале $[a,\tau)$ или просто на $[a,\tau)$.

О п р е д е л е н и е. Под решением включения (1) будем называть функцию $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$, для которой существуют функции $v \in T_b(x)$ и $q \in \Phi_b(x)$, что для любых $t \in [a,b]$ выполняется равенство

$$x(t) = v(t) + W_b(x,q)(t).$$

Далее решение включения (1) будем называть решением на отрезке $[a,b]$ или просто на $[a,b]$.

Т е о р е м а 1. *Пусть для любого $b \in (a,c)$ отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ полунепрерывно снизу по Хаусдорфу. Тогда существует такое $b \in (a,c)$, что множество решений включения* (1) *непусто и является предкомпактным множеством пространства $\mathbf{C}^n[a,b]$.*

О п р е д е л е н и е. Скажем, что непрерывная функция $x : [a,\tau) \to \mathbb{R}$ ($\tau \in (a,c)$) является решением включением семейства включений (1) на $[a,\tau)$, если для произвольного $b \in (a,\tau)$ сужение функции x на отрезок $[a,b]$ является решением включения (1). Решение $x : [a,\tau) \to \mathbb{R}$ семейства включения (1) на $[a,\tau)$, ($\tau \in (a,c)$) назовем непродолжаемым, если не существует такого решения $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ включения (1) ($b \in (\tau,c)$), что для любого $t \in [a,\tau)$ справедливо равенство $x(t) = y(t)$. Если непрерывная функция $x : [a,c) \to \mathbb{R}^n$ является решением семейства включений (1) на $[a,c)$, то будем считать решение $x : [a,c) \to \mathbb{R}$ непродолжаемым.

Т е о р е м а 2. *Пусть для любого $b \in (a,c)$ отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ полунепрерывно снизу по Хаусдорфу. Тогда, чтобы решение $x : [a,\tau) \to \mathbb{R}$ семейства включений* (1) *на $[a,\tau)$ было продолжаемым необходимо и достаточно, чтобы $x : [a,\tau) \to \mathbb{R}^n$ было ограничено на $[a,\tau)$.*

С л е д с т в и е 1. *Пусть для любого $b \in (a,c)$ отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ полунепрерывно снизу по Хаусдорфу. Тогда решение $x : [a,\tau) \to \mathbb{R}$ семейства включений* (1) *на $[a,\tau)$, ($\tau \in (a,c)$) непродолжаемо в том и только том случае, когда $\overline{\lim\limits_{t \to \tau - 0}} |x(t)| = \infty$.*

Т е о р е м а 3. *Пусть для любого $b \in (a,c)$ отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ полунепрерывно снизу по Хаусдорфу. Тогда если функция $y \in \mathbf{C}^n[a,b]$ – решение включения* (1), *то существует такое непродолжаемое решение $x : [a,\tau) \to \mathbb{R}^n$ семейства включений* (1) *на полуинтервале $[a,\tau) \subset [a,c)$ $(\tau \in (b,c])$, что $x : [a,\tau) \to \mathbb{R}^n$ – продолжение решения $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.*

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что отображение $\Phi_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ ослаблено замкнуто или замкнуто в слабой топологии пространства суммируемых функций, если для любой последовательности $x_i\to x$ в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ и любой последовательности $y_i\in\Phi_b(x_i)$, $i=1,2,\ldots$, такое что $y_i\to y$ слабо в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$ при $i\to\infty$, справедливо включение $y\in\Phi_b(x)$.

Л е м м а 1. *Пусть отображение $\Phi_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу, тогда отображение $\Phi_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$ ослаблено замкнуто.*

Для любого $b\in(a,c)$ рассмотрим отображение $\mathfrak{W}_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to 2^{\mathbf{C}^n[a,b]}$, определенное равенством

$$\mathfrak{W}_b(x)=T_b(x)+W_b(x,\Phi_b(x)). \tag{2}$$

Т е о р е м а 4. *Пусть отображение $\Phi_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу. Тогда отображение $\mathfrak{W}_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to 2^{\mathbf{C}^n[a,b]}$, определяемое равенством* (2), *замкнуто.*

Пусть для любого $b\in(a,c)$ отображение $\Phi_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$. По этому отображению определим отображение $\Phi_b^{\rm co}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$ соотношением

$$\Phi_b^{\rm co}(x)=\overline{\rm co}[\Phi_b(x)]. \tag{3}$$

Отображение $\Phi_b^{\rm co}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$, определенное равенством (3), назовем овыпукленным отображением $\Phi_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$.

Л е м м а 2. *Если отображения $\Phi_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу, то отображение $\Phi_b^{\rm co}:\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$, определенное равенством* (3), *также полунепрерывно сверху по Хаусдорфу.*

О п р е д е л е н и е. Пусть $b\in(a,c)$. Будем говорить, что функция $x\in\mathbf{C}^n[a,b]$ есть квазирешение включения (1), если найдется $q\in T_b(x)$ и найдется такая последовательность $y_i\in W_b(x,\Phi_b(x))$, $i=1,2,...$, что $y_i\to x$ в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ при $i\to\infty$.

Пусть $\mathcal{H}_b$ – множество всех квазирешений включения (1).

Пусть $b\in(a,c)$. Рассмотрим включение

$$x\in T_b(x)+W_b(x,\overline{\rm co}[\Phi_b(x)]). \tag{4}$$

Обозначим $H_b^{\rm co}$ множество решений включения (4).

Т е о р е м а 5. *Пусть $b\in(a,c)$ и пусть отображение $\Phi_b:\mathbf{C}^n[a,b]\to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу. Тогда справедливо равенство*

$$\mathcal{H}_b=H_b^{\rm co}. \tag{5}$$

З а м е ч а н и е 1. Согласно леммам 1, 2 и теореме 4, множество $H_b^{\rm co}$, а следовательно, согласно равенству (5), и множество $\mathcal{H}_b$ замкнуто в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ даже без предположения линейности оператора $W_b:\mathbf{C}^n[a,b]\times\mathbf{L}^n[a,b]\to\mathbf{C}^n[a,b]$ по второму аргументу.

Пусть $\varXi$ — метрическое пространство. Рассмотрим включение (1), зависящее от параметров $\xi\in\varXi$ и $b\in(a,c)$, следующего вида

$$x\in T_b(x,\xi)+W_b(x,\Phi_b(x,\xi),\xi), \tag{6}$$

где отображение $T_b:\mathbf{C}^n[a,b]\times\varXi\to\Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ обладает свойствами

1) для любых $b\in(a,c)$ и компактного $U\subset\varXi$ множество $\{(T_b(x,\xi)(a)\subset\mathbb{R}^n:\ x\in\mathbf{C}^n[a,b],\ \xi\in U\}$ ограничено в $\mathbb{R}^n$;

2) для любых $b\in(a,c)$ и $\xi\in\varXi$ оператор $T_b(\cdot,\xi):\mathbf{C}^n[a,b]\to\Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ вольтерров по А.Н. Тихонову;

3) для любого $b \in (a,c)$, любого ограниченного $U_1 \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ и компактного $U_2 \subset \Xi$ образ $T_b(U_1, U_2)$ предкомпактен в $\mathbf{C}^n[a,b]$;

4) для любых $b \in (a,c)$ отображение $T_b : \mathbf{C}^n[a,b] \times \Xi \to \Omega(\mathbf{C}^n[a,b])$ замкнуто.

Для любого $b \in (a,c)$ непрерывное отображение $W_b : \mathbf{C}^n[a,b] \times \mathbf{L}^n[a,b] \times \Xi \to \mathbf{C}^n[a,b]$ удовлетворяет следующим условиям:

1) для любого $b \in (a,c)$, любого компактного $U \subset \Xi$ множество $\{W_b(x,y,\xi)(a) \in \mathbb{R}^n :\ x \in \in \mathbf{C}^n[a,b],\ y \in \mathbf{L}^n[a,b],\ \xi \in U\}$ ограничено в $\mathbb{R}^n$;

2) при каждом $b \in (a,c)$ и любом $\xi \in \Xi$ оператор $W_b(\cdot,\cdot,\xi) : \mathbf{C}^n[a,b] \times \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ вольтерров по А.Н. Тихонову;

3) для любого $b \in (a,c)$, каждого ограниченного $U_1 \subset [a,b]$, слабо компактного $U_2 \subset \subset \mathbf{L}^n[a,b]$ и компактного множества $U_3 \subset \Xi$ образ $W_b(U_1; U_2; U_3)$ предкомпактен в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$.

Далее, для любого $b \in (a,c)$ отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \times \Xi \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ обладает свойствами:

1) для каждого ограниченного $U_1 \subset \mathbf{C}^n[a,b]$ и компактного $U_2 \subset \Xi$ образ $\Phi_b(U_1; U_2)$ ограничен суммируемой функцией на отрезке $[a,b]$;

2) при каждом $b \in (a,c)$ и любом $\xi \in \Xi$ оператор $\Phi_b(\cdot,\xi) : \mathbf{C}^n[a,b] \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ вольтерров по А.Н. Тихонову.

Пусть $H(\xi)$ — множество всех непродолжаемых решений семейства включений (6) при $\xi \in \Xi$. Пусть $q(x) \in (a,c]$ – правая точка на котором определено решение $x \in H(\xi)$. Для любого $\xi \in \Xi$ обозначим

$$\nu(\xi) = \sup\{b \in (a,c) : \forall x \in H(\xi)\ b < q(x)$$

$$\text{и множество } \{x|_a^b : x \in H(\xi) \text{ ограничено в пространстве } \mathbf{C}^n[a,b]\}\}. \tag{7}$$

Т е о р е м а 6. *Пусть $b \in (a,c)$ и отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ непрерывно по Хаусдорфу. Тогда для любого $\xi \in \Xi$ справедливо соотношение*

$$\nu(\xi) = \inf\{q(y) : y \in H(\xi)\} > a. \tag{8}$$

Отображение $\nu : \Xi \to (a,c]$, заданное равенством (8), *полунепрерывно снизу. Если отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \to \Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$, то найдется такой $x \in H(\xi)$, что $q(x)$ реализует левую часть соотношения* (8).

Пусть $H(b,\xi)$ $(b \in (a,c))$ множество решений включения (6). Будем говорить, что включение (6) априорно ограничено, если существует число $m > 0$, для которого для любого $\tau \in (a,b]$ не существует решения $y \in H(\tau,\xi)$, удовлетворяющего неравенству

$$||y||_{\mathbf{C}^n[a,\tau]} > m. \tag{9}$$

Если неравенство (9) выполняется для любого ξ, принадлежащего некоторому множеству $U \subset \Xi$, то в этом случае будем говорить, что включение (6) априорно ограничено на множестве $U \subset \Xi$ в совокупности.

Т е о р е м а 7. *Пусть для $b \in (a,c)$ отображение $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \times \Xi \to Sw[\mathbf{L}^n[a,b]]$ непрерывно по Хаусдорфу, и пусть включение* (6) *априорно ограничено в точке $\xi_0 \in \Xi$. Тогда для* *любого* $\tau \in (a,b]$ *множество* $H(\tau,\xi_0)$ *непусто, является предкомпактным множеством в пространстве* $\mathbf{C}^n[a,\tau]$ *и для него выполняется равенство*

$$H(\tau,\xi_0) = H(\xi_0)|_a^\tau.$$

Кроме того, найдется такой шар с центром в точке $\xi_0 \in \Xi$, *что включение* (6) *априорно ограничено в совокупности на этом шаре.*

З а м е ч а н и е 2. Из теоремы 7 вытекает, что если включение (6) априорно ограничено в точке $\xi_0 \in \Xi$, то точка ξ_0 не является изолированной с точки зрения априорной ограниченности.

Т е о р е м а 8. *Пусть для* $b \in (a,c)$ *отображение* $\Phi_b : \mathbf{C}^n[a,b] \times \Xi \to \Omega(Sw[\mathbf{L}^n[a,b]])$ *непрерывно по Хаусдорфу, и пусть включение* (6) *априорно ограничено в точке* $\xi_0 \in \Xi$. *Тогда множество решений* $H(b,\xi)$, *рассматриваемое как множество зависящее от параметра* $\xi \in \Xi$, *полунепрерывно сверху по Хаусдорфу в точке* $\xi_0 \in \Xi$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Некоторые результаты по теории возмущений многозначных операторов с выпуклыми замкнутыми значениями отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и их приложения // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 1997. Т. 2. Вып. 2. С. 111-120.
2. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Асимптотическое представление множеств δ-решений включения типа Гаммерштейна // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 1997. Т. 2. Вып. 3. С. 294-298.
3. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Математический сборник. 1998. Т. 189. № 6. С. 3-32.
4. *Булгаков А.И., Ткач Л.И.* Возмущение однозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами // Известия вузов. Математика. 1999. № 3. С. 3-16.
5. *Булгаков А.И., Беляева О.П., Григоренко А.А.* К теории возмущенных включений и ее приложениях // Математический сборник. 2005. Т. 196. № 10. С. 21-78.
6. *Григоренко А.А., Панасенко Е.А.* Некоторые вопросы теории возмущенных включений и их приложения: монография. Тамбов: Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2010. 118 с.
7. *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Панасенко Е.А.* Возмущение вольтерровых включений импульсными операторами // Известия института математики и информатики УдГУ. Ижевск, 2012. Вып. 1(39). С. 17-20.
8. *Булгаков А.И., Григоренко А.А., Панасенко Е.А.* Включения с вольтерровыми по А.Н. Тихонову операторами и импульсными воздействиями // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 21-24.
9. *Тихонов А.Н.* О функциональных уравнениях типа Вольтера и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. Моск. ун-та, Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1-25.
10. *Булгаков А.И., Максимов В.П.* Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 8. С. 1362-1374.

Поступила в редакцию 10 ноября 2012 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 11-01-00-645, № 11-01-00-626), Министерства образования и науки РФ (ГК № 14.132.21.1348, проект № 1.1877.2011).

Bulgakov A.I., Grigorenko A.A. DISTURBANCES OF A CONVEX-VALUED VOLTERRA INCLUSION BY A VOLTERRA OPERATOR NOT NECESSARILY CONVEX- OR CLOSED-VALUED

The article is concerned with an inclusion the right-hand side of which is the sum of the values of a convex-valued Volterra operator and those of the superposition of a single-valued Volterra map and a multi-valued map with decomposable images in the space of integrable functions. For such an inclusion, there are formulated theorems about solvability and extendability of solutions and there is derived an important property of quasi-solutions. There is also studied an inclusion depending on a parameter from some metric space.

Key words: disturbances of Volterra operators; local solvability; extendability of solutions; a-priori boundedness; quasi-solution.

УДК 517.911, 517.968

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ОПЕРАТОРОМ НЕМЫЦКОГО

© **А. И. Булгаков, А. И. Коробко, Е. В. Малютина, О. В. Филиппова**

Ключевые слова: функционально-дифференциальное включение; импульсные воздействия; оператор Немыцкого; вольтерров по А.Н. Тихонову оператор.

Рассматриваются достаточные условия априорной ограниченности множества решений функционально-дифференциального включения с импульсными воздействиями, порожденного оператором Немыцкого, и достаточные условия выполнения "бэнг-бэнг" принципа этих включений.

Пусть $\operatorname{comp}[\mathbb{R}^n]$ — множество всех непустых компактов n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|$; $h[\cdot;\cdot]$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве $\mathbb{R}^n$; $\mathbf{L}^n[a,b]$ ($\mathbf{L}^n_\infty[a,b]$) — пространство суммируемых по Лебегу (измеримых, ограниченных в существенном) функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{\mathbf{L}^n[a,b]} = \int_a^b |x(t)|ds$ ($\|x\|_{\mathbf{L}^n_\infty[a,b]} = \operatorname{vraisup}\{|x(t)|: \ t\in[a,b]\}$); $S[\mathbf{L}^n[a,b]]$ — множество всех непустых, ограниченных, замкнутых, выпуклых по переключению (см. [1–3]) подмножеств пространства $\mathbf{L}^n[a,b]$; $\operatorname{co} X$ — выпуклая оболочка множества X; $\overline{\operatorname{co}}\ X = \overline{\operatorname{co} X}$; $\overline{\operatorname{ext}}\ X$ — замыкание множества крайних точек множества X.

Пусть $t_k\in[a,b]$ $(a<t_1<\ldots<t_p<b)$ — конечный набор точек. Обозначим $\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]$ — множество всех непрерывных на каждом из интервалов $[a,t_1]$, $(t_1,t_2]$, $\ldots$, $(t_p,b]$ ограниченных функций $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, имеющих пределы справа в точках t_k, $k=1,2,\ldots,p$, с нормой $\|x\|_{\widetilde{\mathbf{C}}^n[a,b]}=\sup\{|x(t)|: \ t\in[a,b]\}$; $\widetilde{\mathbf{C}}^1_+[a,b]$ — множество неотрицательных функций пространства $\widetilde{\mathbf{C}}^1[a,b]$.